Analyse Multirésolution Non Emboîtée
Applications à la visualisation scientifique

Alexandre Gerussi

LMC–IMAG

Modélisation Géométrique et Approximation

Plan de l'exposé

Introduction, Motivations

AMNE : Construction
point de vue non emboîté
point de vue subdivision

Fonctions définies sur des maillages irréguliers
Haar revu et généralisé
Techniques de reconstruction
Décimation adaptative
Opérateurs isométriques et applications

Applications aux modèles décimatoires multirésolution

Conclusion et perspectives

Deux générations d'ondelettes

• **Première génération** (années 80) Bases d'espaces fonctionnels sur $\mathbb{R}$

Mallat 89 : notion d'analyse multirésolution

Applications : caractérisations d'espaces fonctionnels, de classes de régularité, traitement du signal, ...

• **Seconde génération** (années 90) ondelettes biorthogonales, ondelettes sur l'intervalle, multi-ondelettes, ...

Lounsbery 94 : liens entre schémas de subdivision et analyse multirésolution

Sweldens 95 : cadre multirésolution général

Applications : compression, lissage, stockage, visualisation progressive, ...

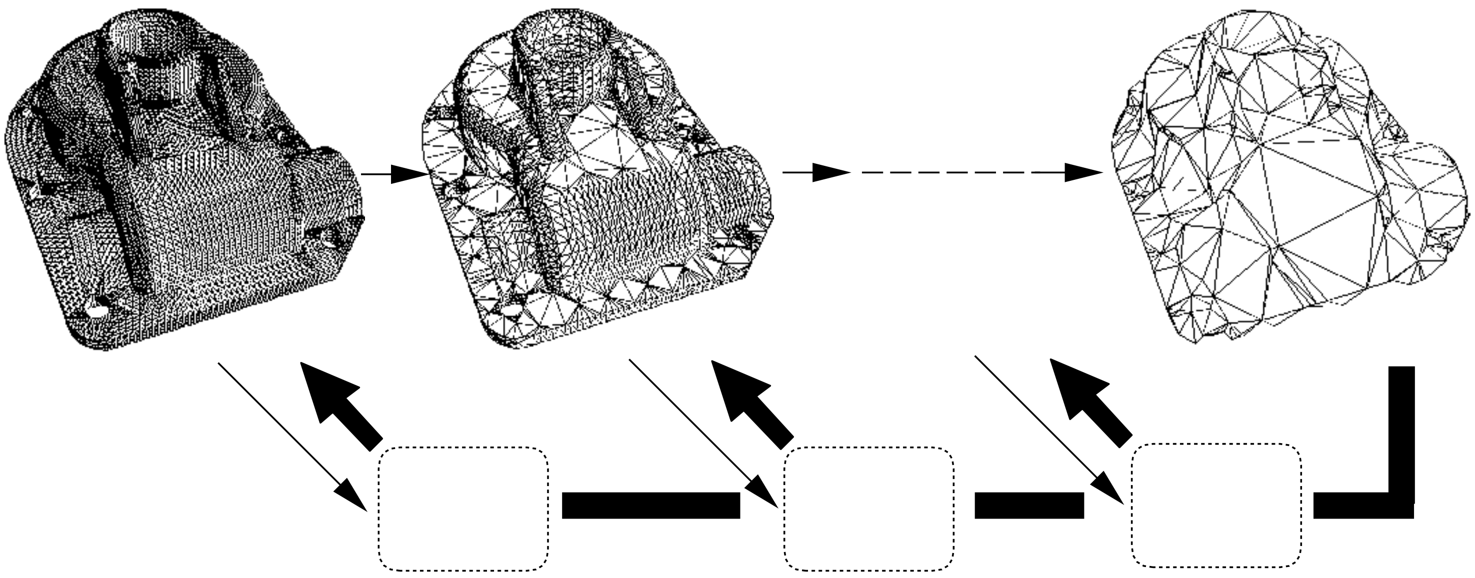
suite d'espaces emboîtés → inadéquat pour certaines formes de données irrégulières

Multirésolution et décimation

multirésolution = approximation grossière + détails hiérarchiques

Description multirésolution d'un maillage : simplification par applications successives d'une opération de simplification élémentaire et réversible

- premiers travaux en 92 (Schroeder)
- progressive meshes (Hoppe 96)
- successive mappings (Cohen, Manocha 97)
- quadric error metric (Garland, Heckbert 98)
- Travaux de De Floriani et Puppo



Ondelettes *vs.* Décimation

Ondelettes

- Cadre mathématique rigoureux
- propriétés analytiques précises
- Rigidité
- Implémentation non triviale

Algorithmes de Décimation

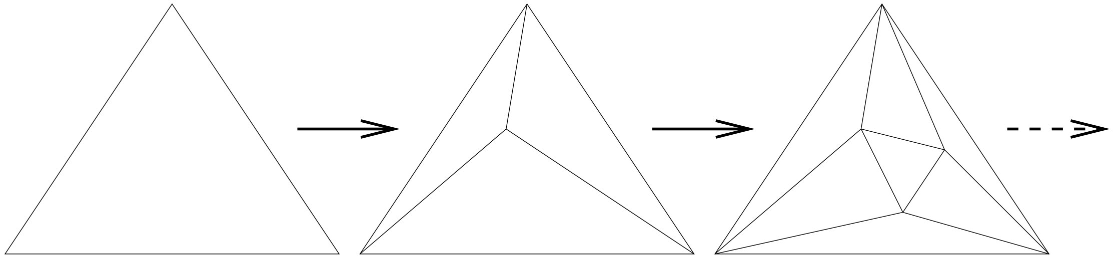
- Algorithme très souple
- Simple à implémenter
- Adaptabilité
- Analyses quantitatives délicates
- Méthodes parfois grossières

cadre plus souple pour conjuguer les avantages des deux approches ?

Motivations

ondelettes avec espaces d'échelle non emboîtés

- régularité des fonctions inadéquate (Bonneau 96)
- suites de maillages irréguliers



Solution proposée

cadre multirésolution général mettant en exergue deux points de vue

- le point de vue de *subdivision*
- le point de vue *non-emboîté*

$\Rightarrow$ concepts souples pour aborder les problèmes de non-emboîtement

$\Rightarrow$ englobe en particulier les constructions de Lounsbery et Sweldens

$\Rightarrow$ lien entre les approches ondelettes et décimatoires

Principe de la décomposition multirésolution

$$\cdots \subset V^n \subset V^{n-1} \subset \cdots$$

On considère alors des projections :

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \xrightarrow{P^n} & V^n & \xrightarrow{P^{n-1}} & V^{n-1} & \xrightarrow{P^{n-2}} & V^{n-2} & \xrightarrow{P^{n-3}} & \cdots \\ & & f^n & & f^{n-1} & & f^{n-2} & & \end{array}$$

Afin de reconstruire les détails perdus, on introduit les espaces $W^n := (\operatorname{Ker} P^n) \cap V^{n+1}$, qui vérifient

$$V^n \oplus W^n = V^{n+1}$$

on peut décomposer les données selon le schéma

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "P^n"] & V^n \arrow[r, "P^{n-1}"] \arrow[dr, "Q^{n-1}"] & V^{n-1} \arrow[r, "P^{n-2}"] \arrow[dr, "Q^{n-2}"] & V^{n-2} \arrow[r, "P^{n-3}"] & \cdots \\ & & W^{n-1} & W^{n-2} & \end{tikzcd}$$

On a alors la formule de reconstruction

$$f_n = f_m + \sum_{m \leqslant i < n} g_i, \quad g_i := Q^i(f)$$

Le point de vue non emboîté

- **(1)** *espaces* + **(2)** *opérateurs d'approximation*

$$\cdots \xrightarrow{P^n} \underset{f^n}{V^n} \xrightarrow{P^{n-1}} \underset{f^{n-1}}{V^{n-1}} \xrightarrow{P^{n-2}} \underset{f^{n-2}}{V^{n-2}} \xrightarrow{P^{n-3}} \cdots$$

- les espaces de détail $W^k := \mathrm{Ker}(P^k)$
- **(3)** les *espaces auxiliaires* $\tilde{V}^k$, tels que

$$V^{k+1} = \tilde{V}^k \oplus W^k$$

$$f_{k+1} = R^k(f_{k+1}) + Q^k(f_{k+1}) = S^k(f^k) + g_k,$$

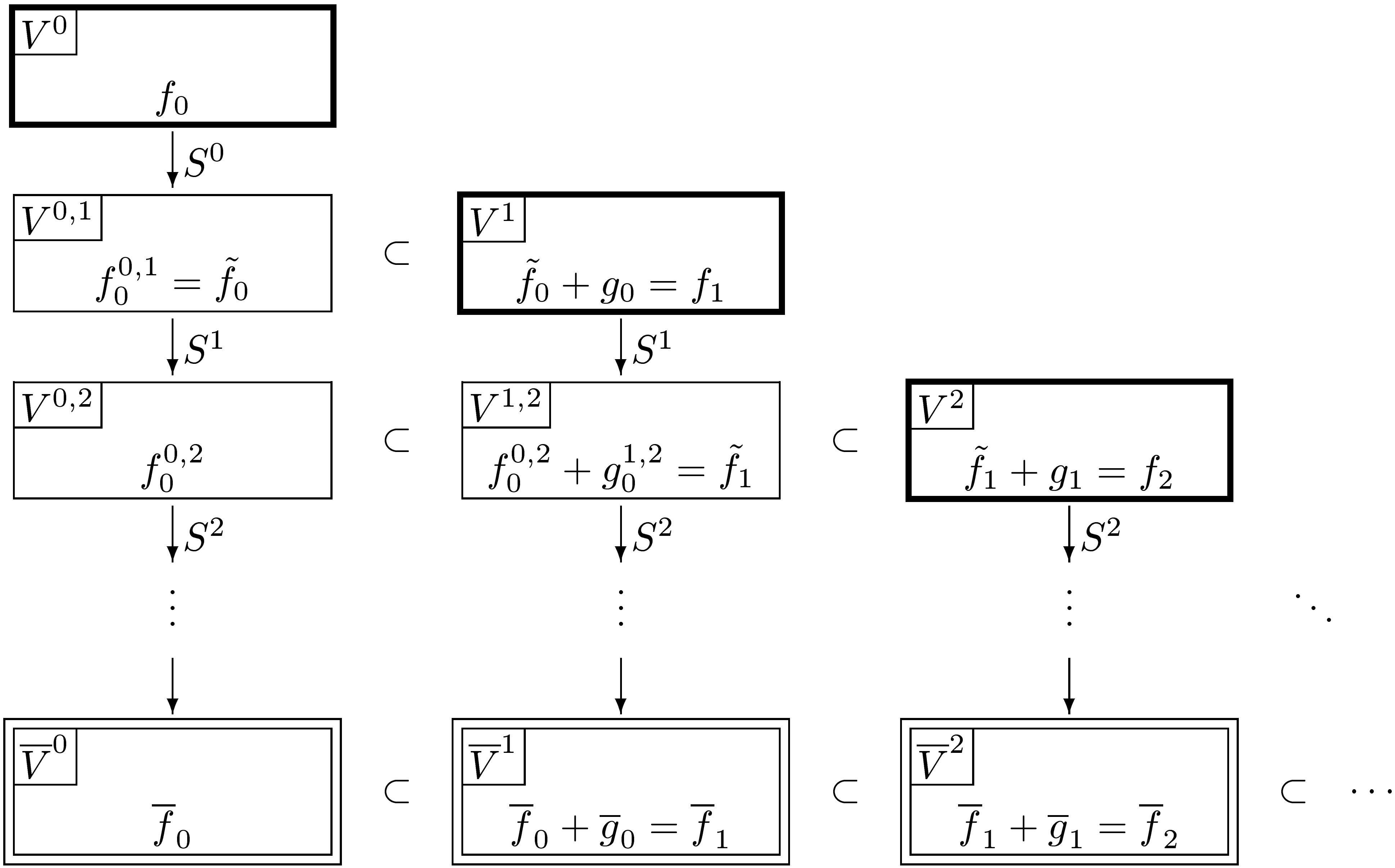
où $S^k := \mathrm{Inv}(P^k_{|\tilde{V}^k})$ sont les *opérateurs de synthèse*, vérifiant $S^k \circ P^k = R^k$.

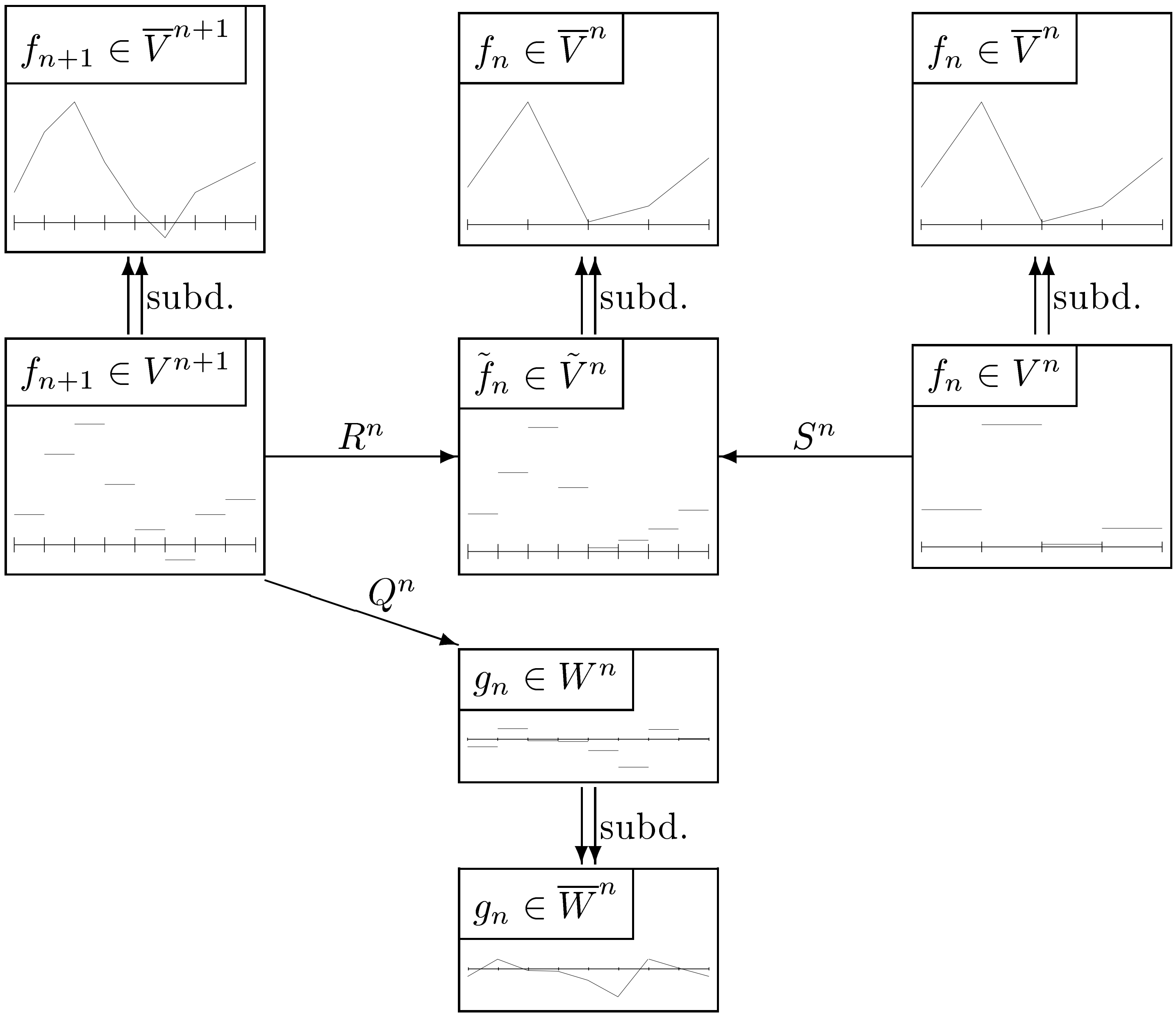
Schéma de décomposition des données

$$\begin{tikzcd}
f_0 & \cdots f_i \arrow[l, "P^0"'] \arrow[dl, "Q^0"] & f_{i+1} \arrow[l, "P^i"'] \arrow[dl, "Q^i"] & \cdots f_{n-1} \arrow[l, "P^{i+1}"'] \arrow[dl, "Q^{i+1}"] & f_n \arrow[l, "P^{n-1}"'] \arrow[dl, "Q^{n-1}"] \\
g_0 & \cdots g_i & g_{i+1} & \cdots g_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

Schéma de reconstruction des données

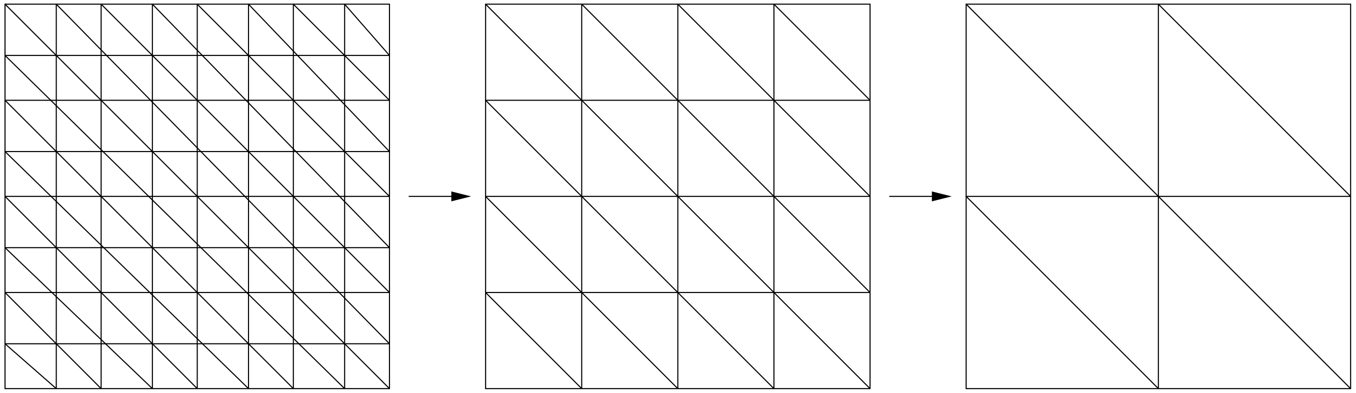
$$\begin{tikzcd}
f_0 \arrow[r, "S^0"] & \cdots f_i \arrow[r, "S^i"] & f_{i+1} \arrow[r, "S^{i+1}"] & \cdots f_{n-1} \arrow[r, "S^{n-1}"] & f_n \\
g_0 \arrow[ur, "+"] & \cdots g_i \arrow[ur, "+"] & g_{i+1} \arrow[ur, "+"] & \cdots g_{n-1} \arrow[ur, "+"] &
\end{tikzcd}$$


V^0
f_0
S^0
$V^{0,1}$
$f_0^{0,1} = \tilde{f}_0$
$\subset$
V^1
$\tilde{f}_0 + g_0 = f_1$
S^1
S^1
$V^{0,2}$
$f_0^{0,2}$
$\subset$
$V^{1,2}$
$f_0^{0,2} + g_0^{1,2} = \tilde{f}_1$
$\subset$
V^2
$\tilde{f}_1 + g_1 = f_2$
S^2
S^2
S^2
$\overline{V}^0$
$\overline{f}_0$
$\subset$
$\overline{V}^1$
$\overline{f}_0 + \overline{g}_0 = \overline{f}_1$
$\subset$
$\overline{V}^2$
$\overline{f}_1 + \overline{g}_1 = \overline{f}_2$
$\subset \cdots$


$f_{n+1} \in \overline{V}^{n+1}$
$f_n \in \overline{V}^n$
$f_n \in \overline{V}^n$
subd.
subd.
subd.
$f_{n+1} \in V^{n+1}$
$\tilde{f}_n \in \tilde{V}^n$
$f_n \in V^n$
R^n
S^n
Q^n
$g_n \in W^n$
subd.
$g_n \in \overline{W}^n$

Haar revu et généralisé

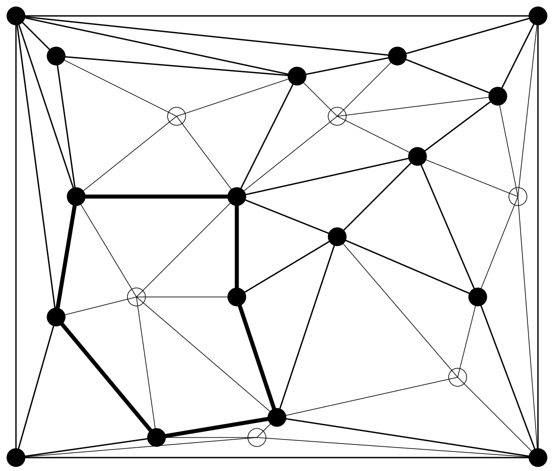
Haar dans le cas emboîté triangulaire



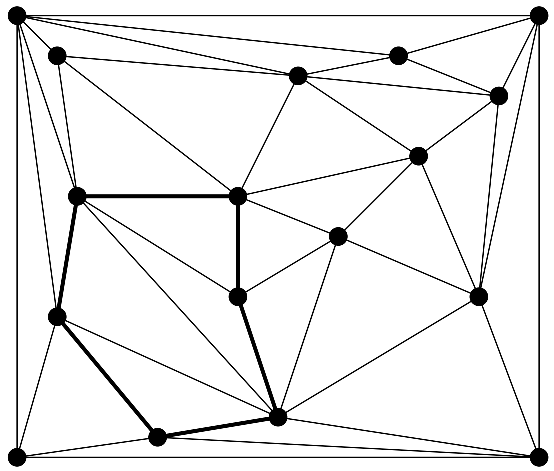
- espaces d'approximation V^n = espaces des fonctions constantes par morceaux sur les triangles $\rightarrow$ ils sont emboîtés
- opérateurs d'approximation P^n = projections orthogonales
- les espaces auxiliaires $\tilde{V}^n$ sont pris égaux aux espaces $V^n \Rightarrow$ cadre complet

$\rightarrow$ la projection orthogonale est un assemblage de projections orthogonales locales
(la matrice des P^n est diagonale par blocs)

Création des espaces d’approximation par décimation régulière



maillage $\mathcal{T}_n$ sous-jacent à $\mathcal{K}^n$



maillage $\mathcal{T}_{n-1}$ sous-jacent à $\mathcal{K}^{n-1}$

- deux types d’espaces :

(i) $\mathcal{K} = \mathcal{C}$: espaces des fonctions constantes par morceaux sur les triangles

(ii) $\mathcal{K} = \mathcal{L}$: espaces des fonctions linéaires par morceaux et continues sur les triangles

Les opérateurs d'approximation

Intention : projection orthogonale

- Cas constant : orthogonalité $\Rightarrow$ localité

pas de décimation $p \geqslant 1 \Rightarrow$ les polygones d'influence sont disjoints $\Rightarrow$ matrice diagonale par blocs

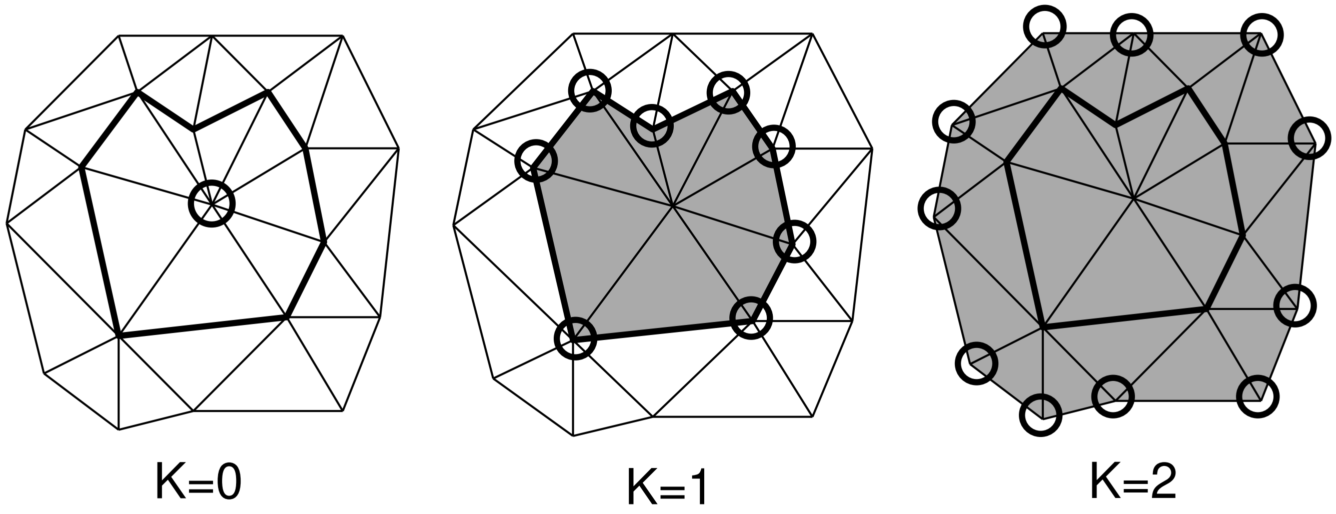
$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{C}^{i+1} & = & \mathcal{C}_0^{i+1} & \overset{\perp}{\oplus} & \mathcal{C}_{j_1}^{i+1} & \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} & \mathcal{C}_{j_n}^{i+1} \\
\downarrow P^i & & \downarrow \mathrm{Id} & & \downarrow \mathcal{P}^{\perp}_{\mathcal{C}^i_{j_1}} & & \downarrow \mathcal{P}^{\perp}_{\mathcal{C}^i_{j_n}} \\
\mathcal{C}^{i} & = & \mathcal{C}_0^{i} & \overset{\perp}{\oplus} & \mathcal{C}_{j_1}^{i} & \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} & \mathcal{C}_{j_n}^{i}
\end{array}$$

- Cas linéaire : non orthogonalité $\Rightarrow$ problème *global*

$\rightarrow$ **localisation** en calculant la meilleure approximation sur un **domaine restreint**

- introduction d'un paramètre de localité $K \geqslant 0$ et pratique d'une décimation à pas $p \geqslant \max(1, 2K)$.

$\Rightarrow$ les K-voisinages des sommets supprimés sont *disjoints*

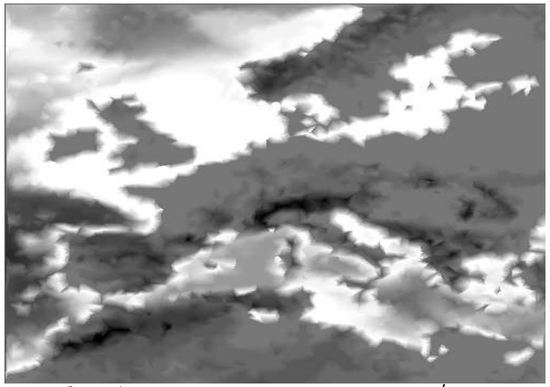


$\Rightarrow$ décomposition de $\mathcal{L}^n$ en somme directe de sous-espaces locaux $\mathcal{L}^n_i$, sur lesquels on calcule la projection orthogonale locale

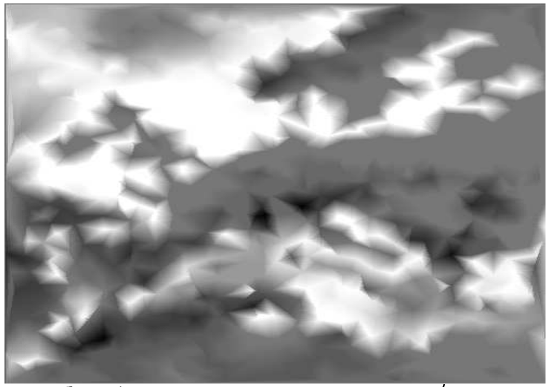
$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{L}^{i+1} & = & \mathcal{L}_0^{i+1} & \oplus & \mathcal{L}_{j_1}^{i+1} & \oplus & \cdots & \oplus & \mathcal{L}_{j_n}^{i+1} \\
\downarrow P^i_{\mathrm{loc}} & & \downarrow \mathrm{Id} & & \downarrow \mathcal{P}^{\perp}_{\mathcal{L}^i_{j_1}} & & & & \downarrow \mathcal{P}^{\perp}_{\mathcal{L}^i_{j_n}} \\
\mathcal{L}^{i} & = & \mathcal{L}_0^{i} & \oplus & \mathcal{L}_{j_1}^{i} & \oplus & \cdots & \oplus & \mathcal{L}_{j_n}^{i}
\end{array}
$$

- il y a convergence exponentielle de la projection localisée vers la projection orthogonale globale

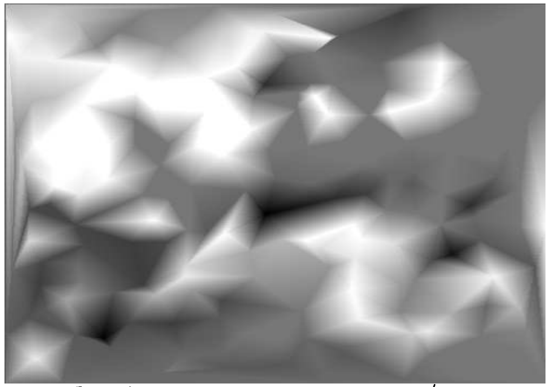
données initiales : 25 000 s. constant : 2664/21 constant : 220/12



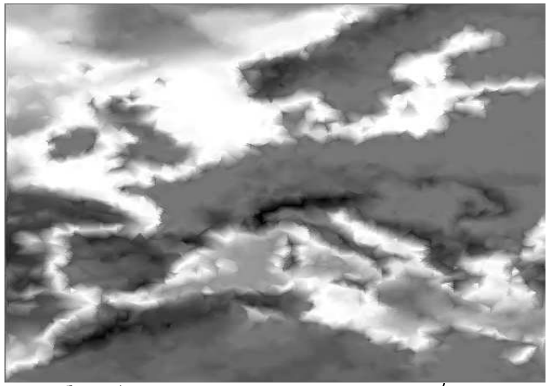
linéaire : $K = 0$, 4676/23



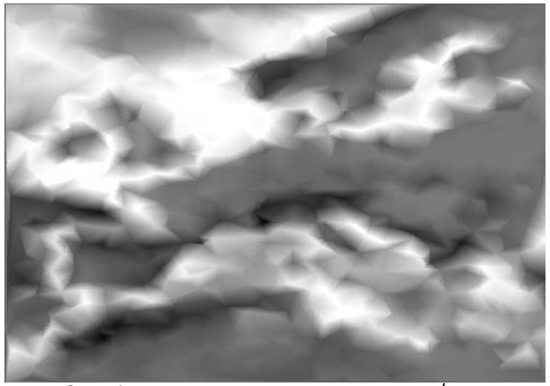
linéaire : $K = 0$, 1176/18



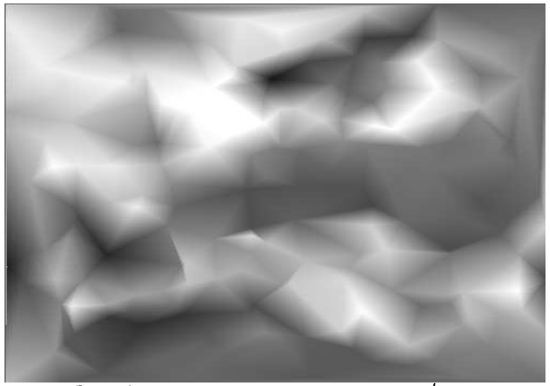
linéaire : $K = 0$, 220/12



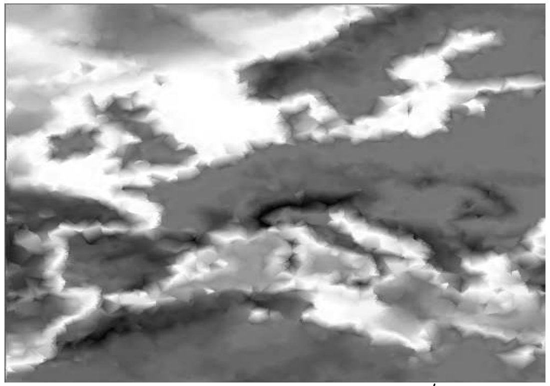
linéaire : $K = 1$, 4934/60



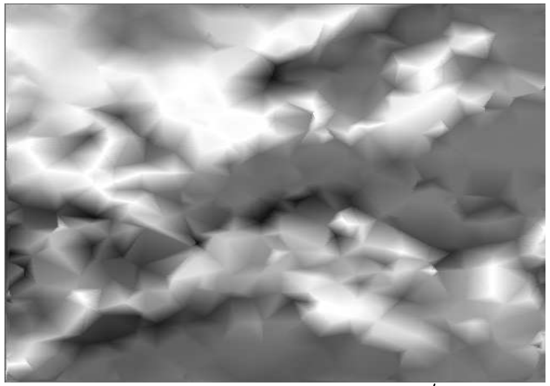
linéaire : $K = 1$, 1057/45



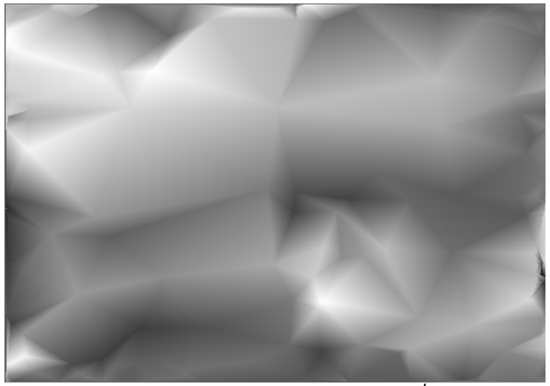
linéaire : $K = 1$, 193/28



linéaire : $K = 3$, 5009/478



linéaire : $K = 3$, 1006/342



linéaire : $K = 3$, 200/171

Le choix des espaces auxiliaires

$\rightarrow$ On voudrait imposer un cadre semi-orthogonal

- Cas constant : les sous-espaces locaux sont orthogonaux $\Rightarrow$ on peut prendre les orthogonaux locaux

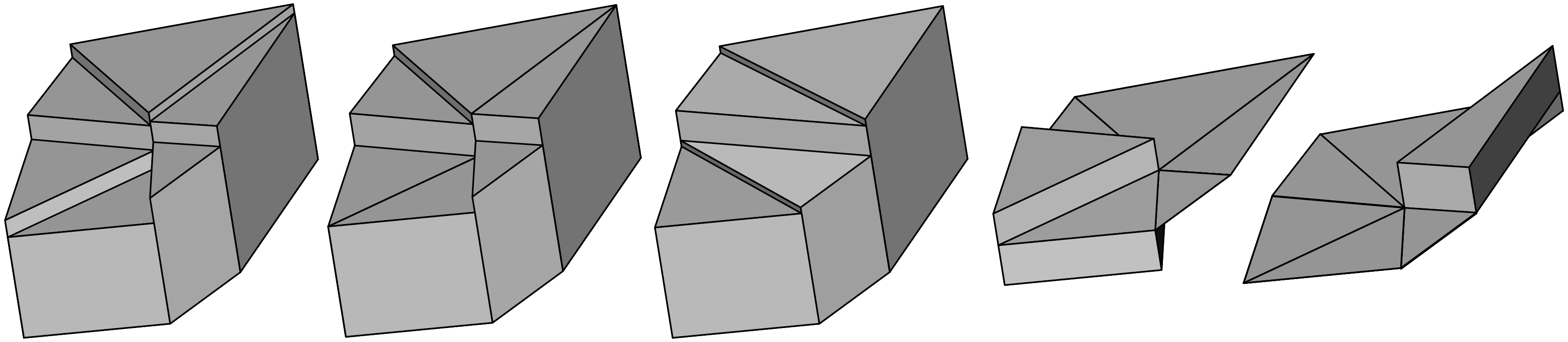
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{C}^{i+1} \arrow[d, "P^i"] & = & \mathcal{C}_0^{i+1} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \overset{\perp}{\oplus} & {[W^i_{j_1} \overset{\perp}{\oplus} \tilde{V}^i_{j_1}]} \arrow[d, "\mathcal{P}^{\perp}_{\mathcal{C}^i_{j_1}}"] & \overset{\perp}{\oplus}\cdots\overset{\perp}{\oplus} & {[W^i_{j_n} \overset{\perp}{\oplus} \tilde{V}^i_{j_n}]} \arrow[d, "\mathcal{P}^{\perp}_{\mathcal{C}^i_{j_n}}"] \\
\mathcal{C}^i & = & \mathcal{C}_0^i & \overset{\perp}{\oplus} & \mathcal{C}^i_{j_1} & \overset{\perp}{\oplus}\cdots\overset{\perp}{\oplus} & \mathcal{C}^i_{j_n}
\end{tikzcd}$$

- Cas linéaire : on perd l'orthogonalité par passage du local au global

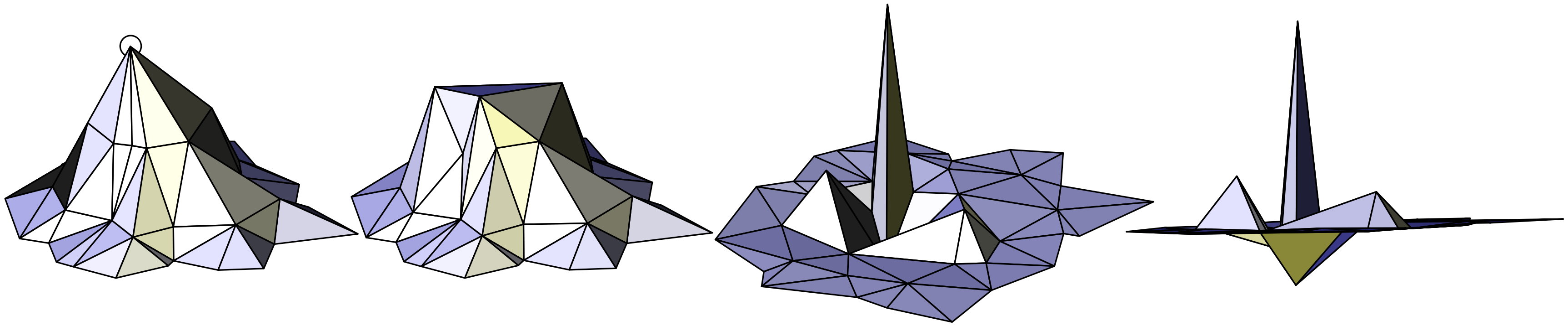
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{L}^{i+1} \arrow[d, "P^i_{\mathrm{loc}}"] & = & \mathcal{L}_0^{i+1} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \oplus & {[W^i_{j_1} \overset{\perp}{\oplus} \tilde{V}^i_{j_1}]} \arrow[d, "\mathcal{P}^{\perp}_{\mathcal{L}^i_{j_1}}"] & \oplus\cdots\oplus & {[W^i_{j_n} \overset{\perp}{\oplus} \tilde{V}^i_{j_n}]} \arrow[d, "\mathcal{P}^{\perp}_{\mathcal{L}^i_{j_n}}"] \\
\mathcal{L}^i & = & \mathcal{L}_0^i & \oplus & \mathcal{L}^i_{j_1} & \oplus\cdots\oplus & \mathcal{L}^i_{j_n}
\end{tikzcd}$$

Illustrations locales

Décomposition locale constante : f^{k+1}, $\tilde{f}^k$, f^k, ψ_1^k et ψ_2^k



Décomposition locale linéaire $K = 2$: f^{k+1}, f^k et ψ^k (2 vues)



Reconstruction des données

La reconstruction par niveaux

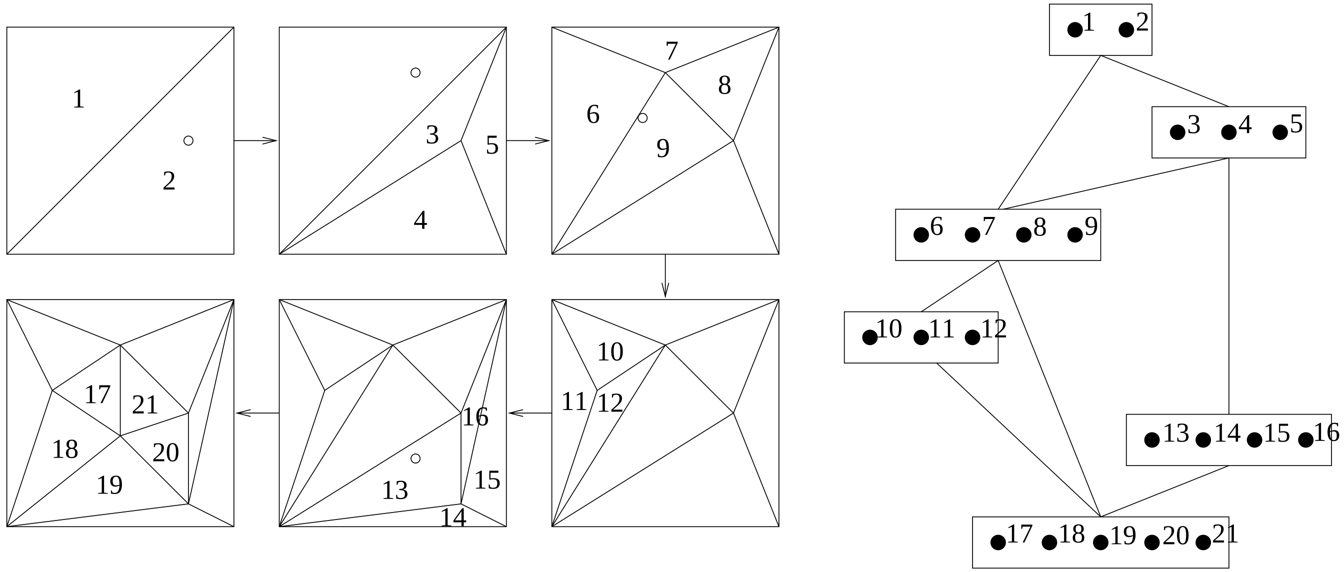
- reconstruit chaque approximation f_k
- reconstruction partielle possible, mais :
  - taille(triangulation) $\geqslant 4\times$taille(coefficients) $\Rightarrow$ *peu significatif de « compresser » les coefficients*
  - fonction « compressée » définie sur le même nombre de triangles $\Rightarrow$ même charge pour l'affichage

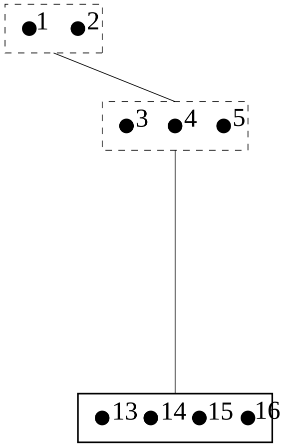
$\rightarrow$ la fonction d'intérêt est celle des espaces d'approximation

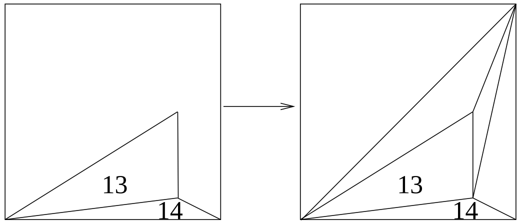
$\Rightarrow$ point de vue non emboîté

La reconstruction adaptative

Idée : utiliser moins de triangles pour afficher la fonction reconstruite







- fonction reconstruite adaptativement = assemblage de restrictions de fonctions f_k

$\Rightarrow$ valable uniquement dans le cas complet

Approches similaires :

- Lounsbery : subdivision linéaire / visualisation par maillages triangulaires : cadre complet
- Gross : subdivision splines cubiques / visualisation par maillages triangulaires : cadre non complet

- *bon point de vue : reconstruction adaptative = décimation guidée par les coefficients d'ondelettes.*

$\rightarrow$ *idéal : gros coefficients d'ondelettes placés bas dans la pyramide*

L'approximation adaptative

séquence de décimation dédiée à la fonction originale

oracle d'erreur locale $\rightarrow$ un espace d'approximation / sommet

- opérateurs d'approximation, *etc.* :

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{i+1} \arrow[d, "P^i_{\mathcal{C}}"] & = & \mathcal{C}_0^{i+1} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \overset{\perp}{\oplus} & {[W^i \overset{\perp}{\oplus} \tilde{V}^i]} \arrow[d, "\mathcal{P}^{\perp}_{\mathcal{C}^i_{\mathrm{loc}}}"] \\
\mathcal{C}^i & = & \mathcal{C}_0^i & \overset{\perp}{\oplus} & \mathcal{C}^i_{\mathrm{loc}}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^{i+1} \arrow[d, "P^i_{\mathcal{L}}"] & = & \mathcal{L}_0^{i+1} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \oplus & {[W^i \overset{\perp}{\oplus} \tilde{V}^i]} \arrow[d, "\mathcal{P}^{\perp}_{\mathcal{L}^i_{\mathrm{loc}}}"] \\
\mathcal{L}^i & = & \mathcal{L}_0^i & \oplus & \mathcal{L}^i_{\mathrm{loc}}
\end{tikzcd}
$$

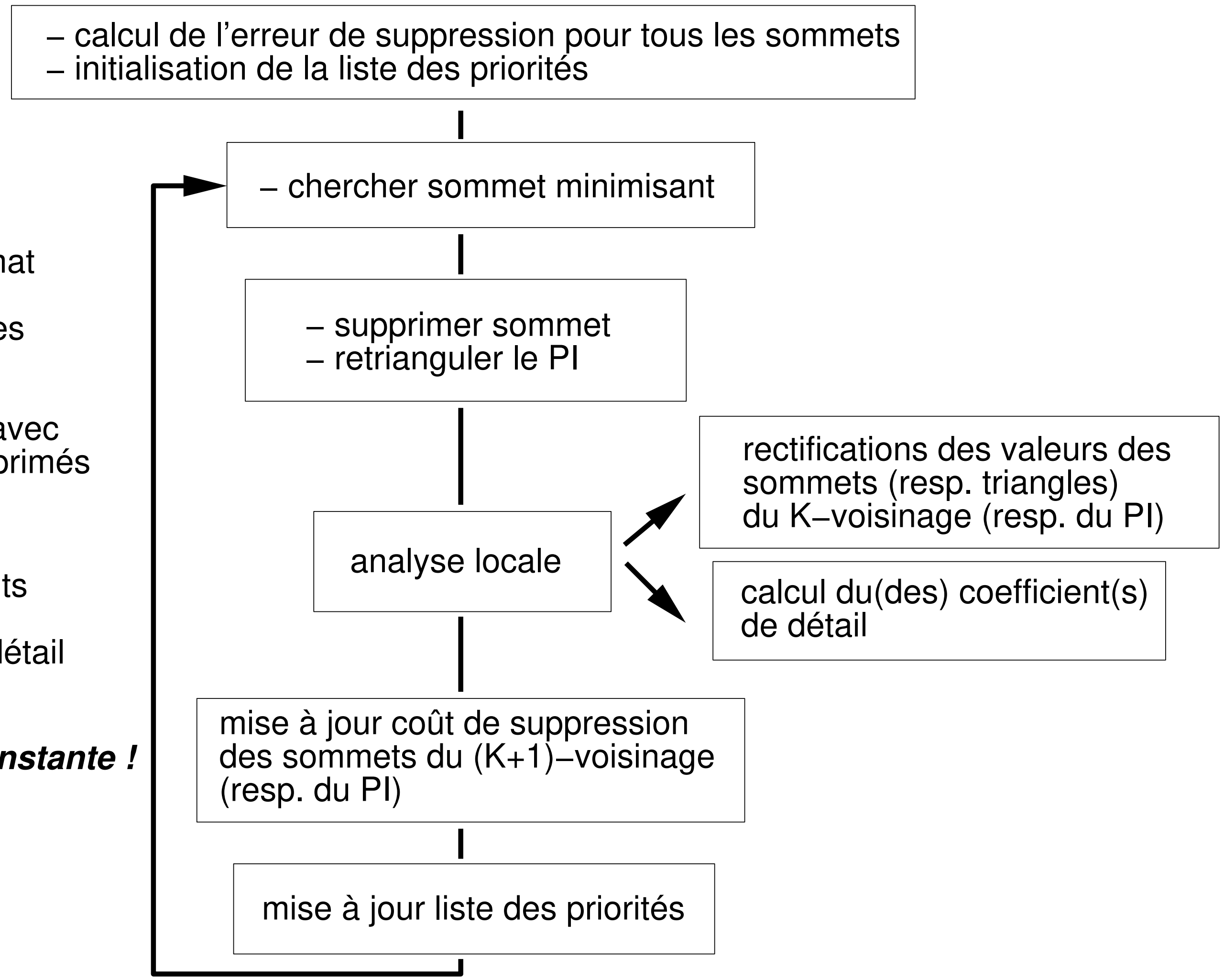
Algorithme d'approximation adaptative

En entrée:
maillage sous format
edge–list
+ données scalaires

En sortie:
maillage grossier avec
sommets non supprimés

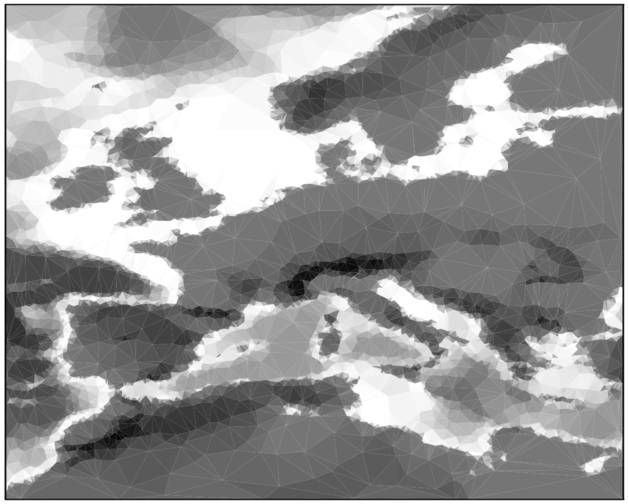
liste des sommets
supprimés
+ indices des points
voisins
+ coefficients de détail

taille mémoire constante !

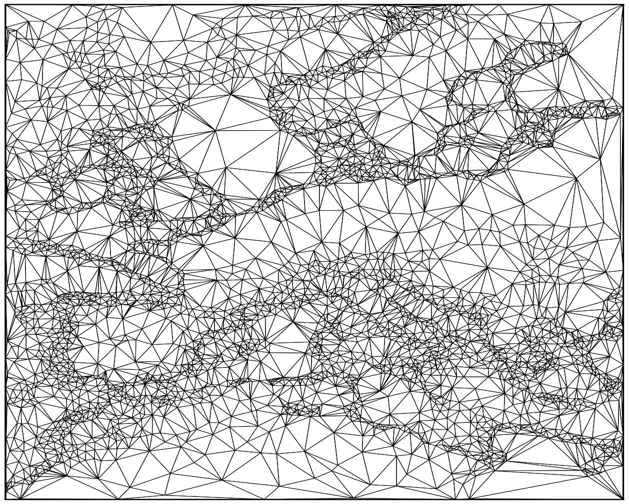


Exemples et comparaisons

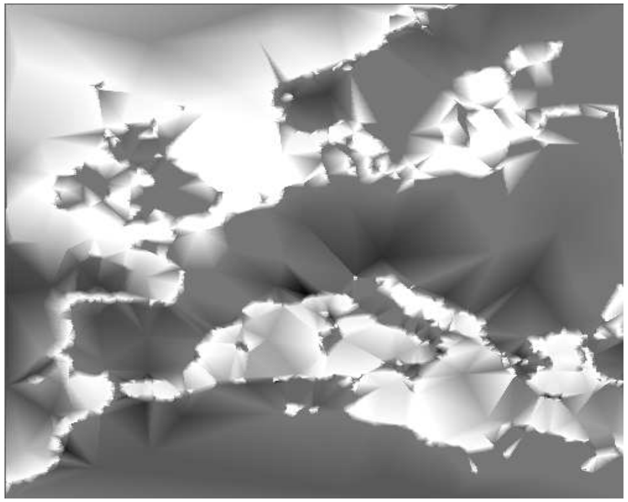
recons. adaptative



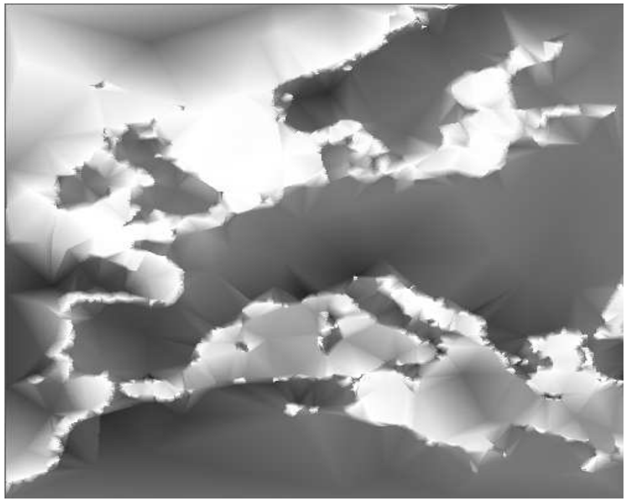
déc. adaptative $\mathrm{OC}_{\mathrm{const}}$



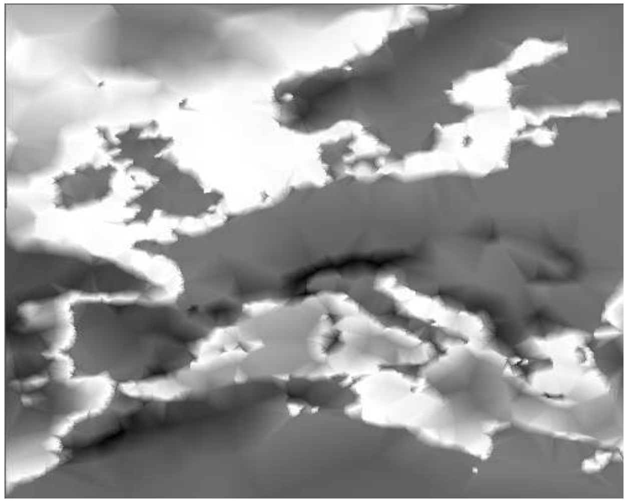
maillage sous-jacent



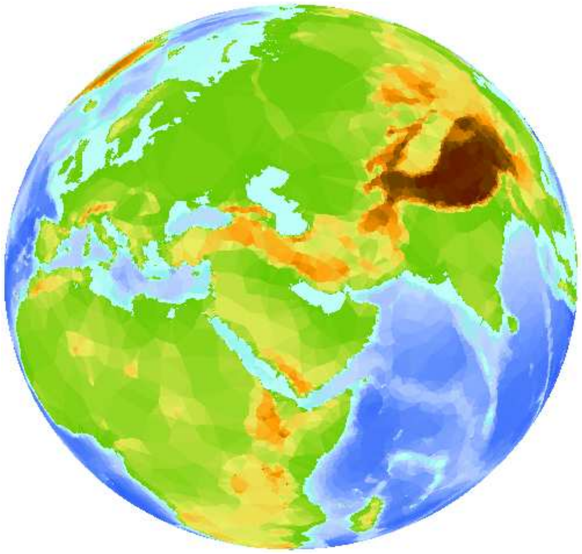
$K = 0$, $\mathrm{OL}_{\infty,1}$



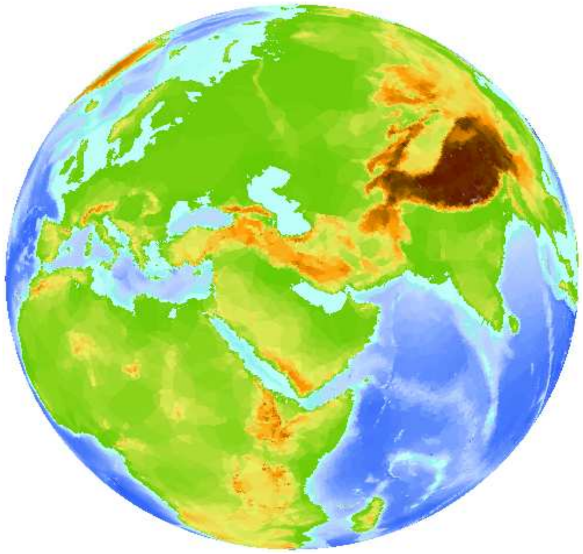
$K = 1$, $\hat{\mathrm{m}}$ séquence



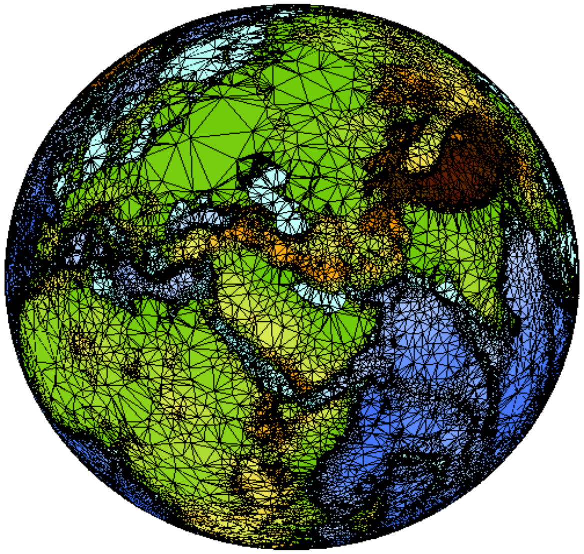
$K = 1$, $\mathrm{OL}_{\mathrm{pond},1}$



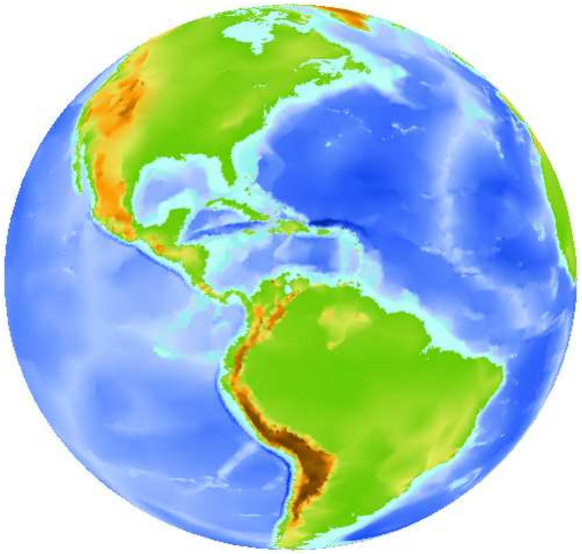
Constant : 80K triangles



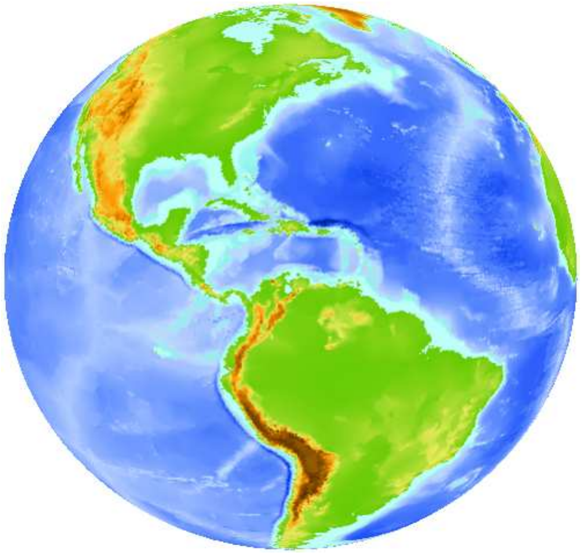
Constant : 200K



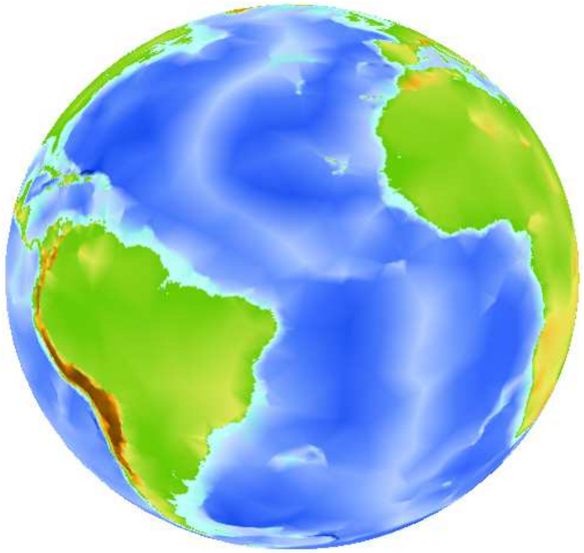
200K avec maillage



Linéaire : 80K sommets



Linéaire : 200K



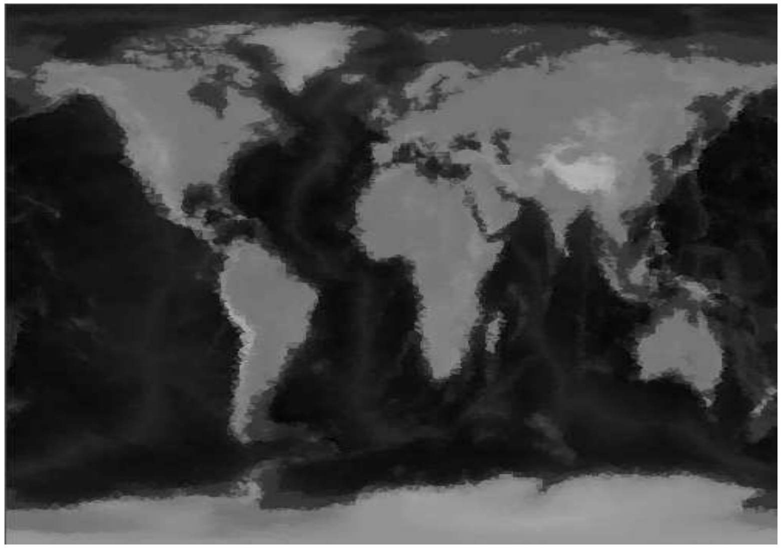
Linéaire : 40K

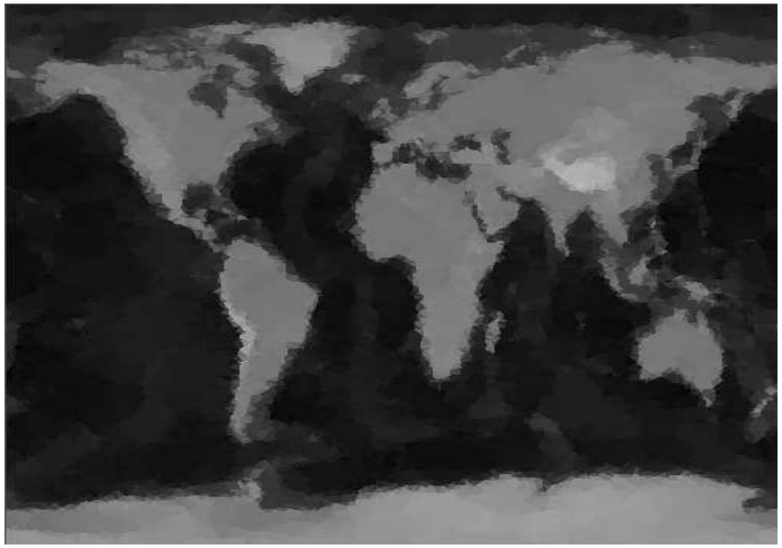
Approximation et subdivision isométrique

• cas particulier de similitudes : mesure d'erreur, décomposition orthogonale

• Utilisation de la DVS pour la construction par approximation au sens de Frobenius d'un opérateur existant : la projection orthogonale.

⇒ garantit des propriétés d'approximation convenables

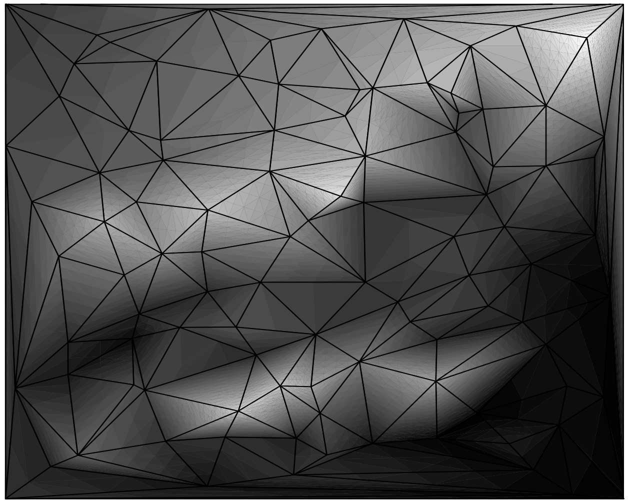




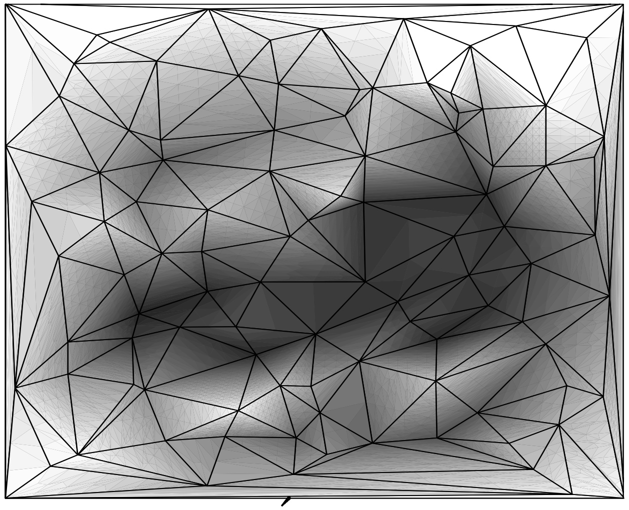
Compression de 95% dans le cas constant : 6% d'erreur relative

Édition à différents niveaux de détails

i. Original



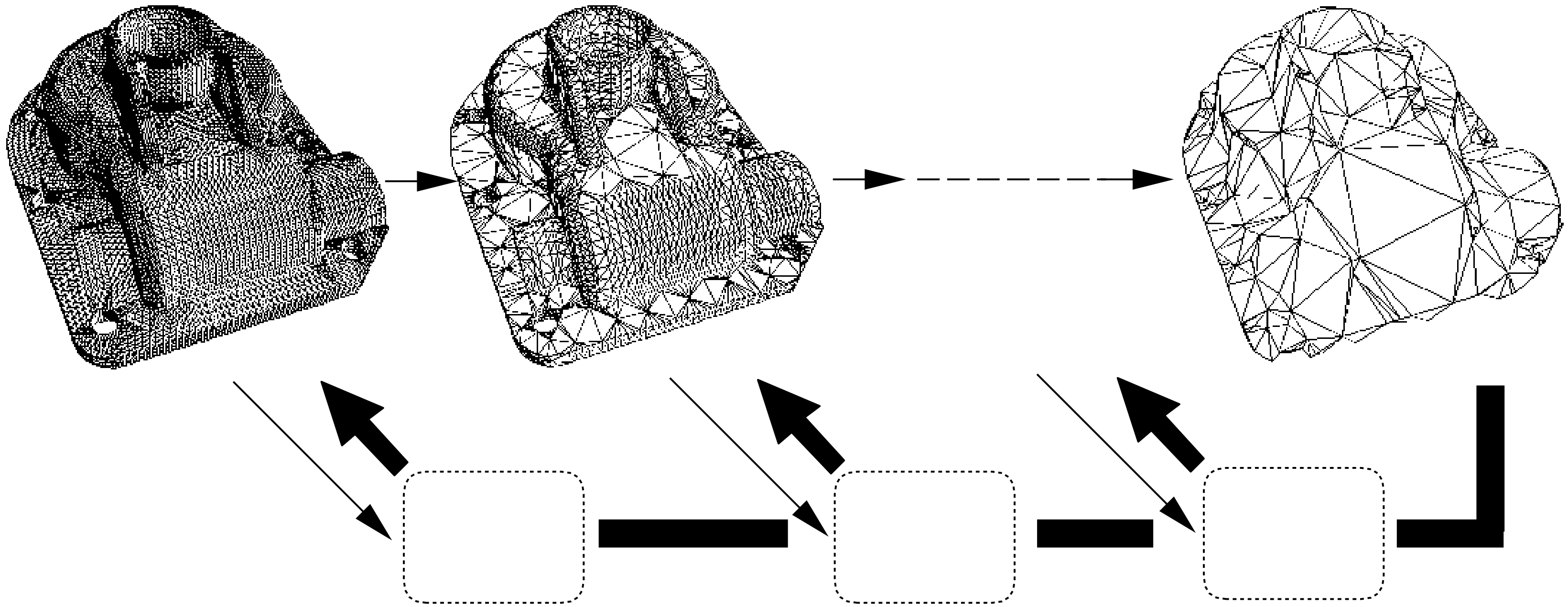
ii. Visualisation grossière



iii. Édition

iv. Reconstruction

Approximation pour modèles surfaciques de décimation



- données définies sur le maillage initial

→ approximation des données sur les maillages simplifiés ?

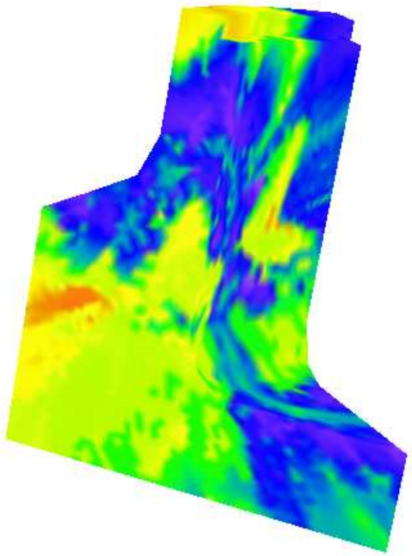
Mise en oeuvre du cadre non-emboîté

On suppose la topologie conservée :

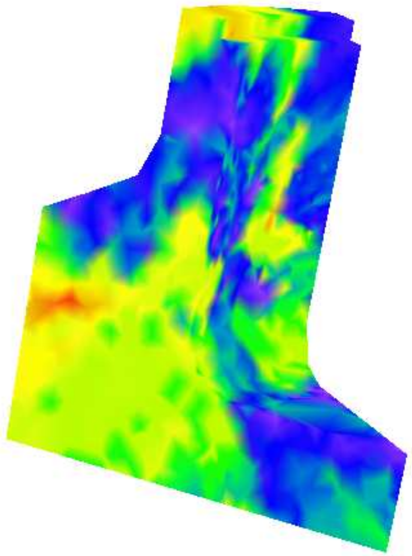
existence d'homéomorphismes entre les maillages successifs

- reparamétrisation de l'ensemble des maillages sur le plus grossier
- choix d'un espace fonctionnel sur chaque maillage $\Rightarrow$ classe de fonctions
- reparamétrisation de ces espaces sur le maillage grossier $\Rightarrow$ espaces d'approximation

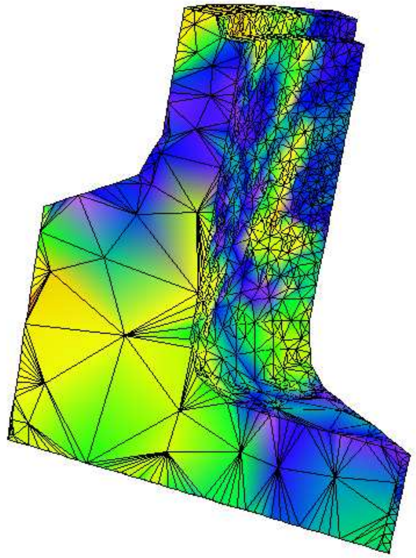
$\Rightarrow$ permet l'approximation/reconstruction non triviale des données sans surcoût mémoire



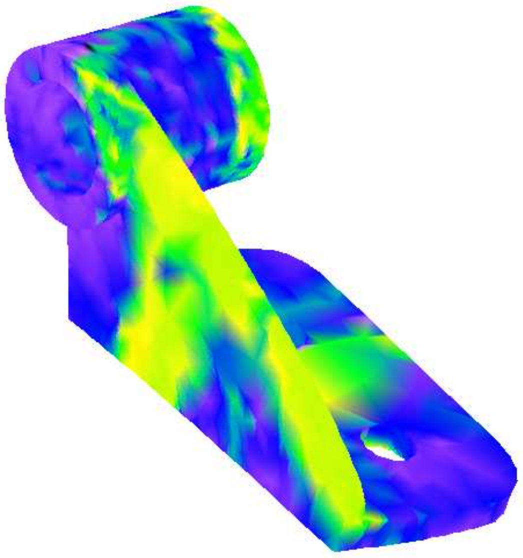
Pot original : 8 600 s.



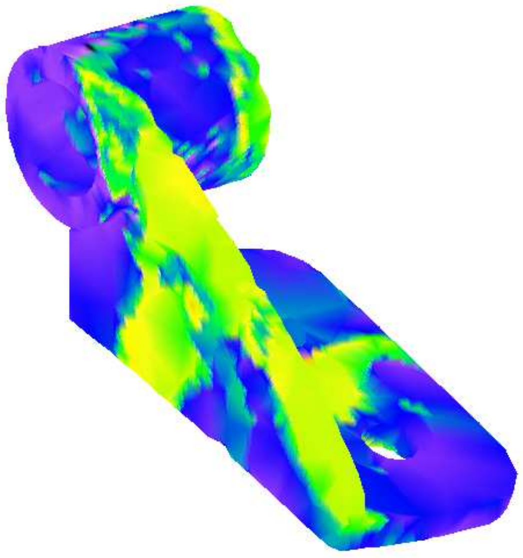
3 500 sommets



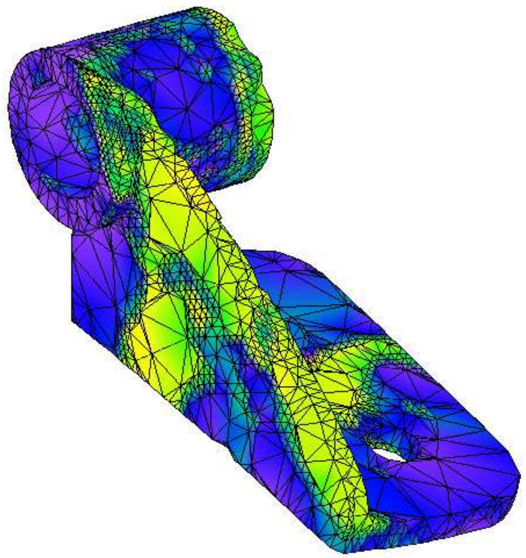
2 000 sommets avec arêtes



critère géométrique



critère mixte



idem avec arêtes

Conclusion

Aspects théoriques

- cadre général pour la multirésolution, avec deux points de vue complémentaires : le point de vue *non emboîté* et de *subdivision*

- résultats et outils théoriques pour le point de vue non emboîté

Aspects applicatifs

- multirésolution pour fonctions définies sur des maillages irréguliers

- généralisation des ondelettes de Haar

- lien et vocabulaire commun pour les approches ondelettes et les approches décimatoires

- offre un cadre approprié à l'utilisation de schémas de subdivision irréguliers

Perspectives

- Mesure d'erreur
- Fonctions définies sur des maillages surfaciques
- Fonctions définies sur un maillage volumique tétraédrique
- Multirésolution pour maillages surfaciques irréguliers